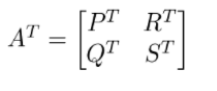
**به نام او**

**پاسخنامه تمرینات سری دوم – فصل دوم**

1. الف) درست. طبق محتوای قسمت ماتریس های بلوکی.

ب) درست. طبق قضیه 3 قسمت (صفحه 99 کتاب)

پ) نادرست زیرا :

ت) نادرست. مثال نقض: ماتریس همانی یکه و قرینه آن

ث) نادرست. اطلاعات کافی برای تصمیم گیری در مورد معکوس پذیری داده نشده است.

ج) نادرست.

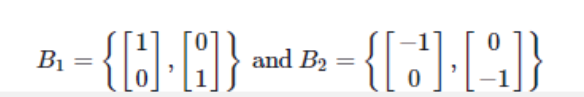
د) نادرست. مثال نقض :

ه) درست:

و) درست. فرض کنیم و . اگر می‌دانیم ( و مستقل خطی‌اند) و . بنابراین *اگر ، نتیجه می‌گیریم پس*  و مستقل خطی‌اند*.*

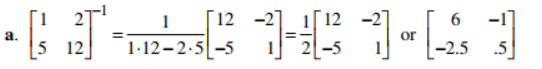
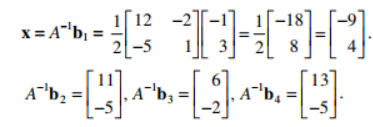
ی) نادرست. مثال نقض:

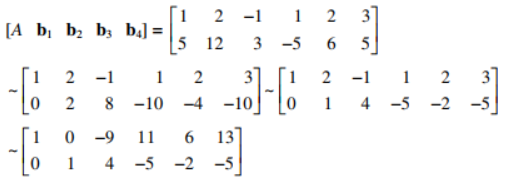
می توانیم بگوییم که  و اگر فضای باشند در نتیجه اشتراک آن ها هم است؛ و اگر فرض کنیم مقادیر به صورت زیر باشد:

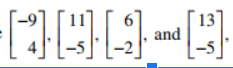


اشتراک  و هم تهی است و می‌دانیم که تهی پایه ی نیست.

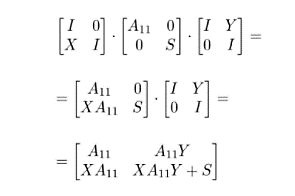
2. هر در را برمی‌داریم. فرض می‎کنیم . معادله را به صورت بازنویسی می‌کنیم. بنابراین بردار در معادله صدق می‌کند. این اثبات می‌کند که معادله به ازای هر در دارای جواب است. با استفاده از قضیه ۴ کتاب در بخش ۱.۴ میتوان گفت در هر ردیف دارای یک است. از آنجایی که هر عنصر در یک ستون مجزاست، تعداد ستون های باید حداقل برابر با تعداد ردیف‌هایش باشد.

3. الف)

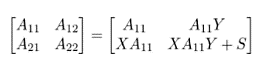
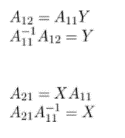
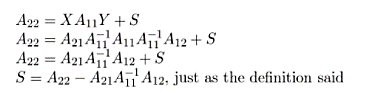
ب)

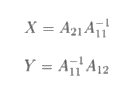


جواب‌ها:

4. ماتریس‌های سمت راست را ضرب می‌کنیم:

حال از آن جایی‌که که ماتریس حاصل مساوی با ماتریس سمت راست است:





بنابراین .

5. ماتریس را به صورت در نظر می‌گیریم. که ها ستون‌های باشند. ثابت می‌کنیم معادله‌ی جواب غیر بدیهی دارد.

= =

کافی است x را برداری در نظر بگیریم که تمام درایه های آن 1 است که طبق فرض سوال:

Ax = =

پس جوابی غیر از دارد و وارون ناپذیر است.

6. ابتدا عبارت مورد نظر را به صورت زیر می نویسیم:

چون ماتریس و را داریم می‌توانیم معادله بالا را به صورت زیر حل کنیم:

حال را در معادله قبلی جایگذاری می‌کنیم:

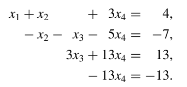
برای حل معادله کلی از اطلاعات بالا استفاده می‌کنیم:

با استفاده از ماتریس و می‌توانیم ماتریس را بدست آوریم:

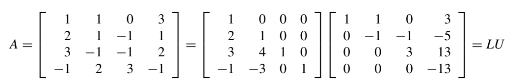
در نهایت با استفاده از ماتریس و به ماتریس که همان جواب معادله است می‌رسیم.

https://lh6.googleusercontent.com/1MAbyTEEarMnONvulf51FOYoR4xm7u_FJ8odL_lgD0hJm3jiy_lkzX_Sami07tqcmTGOl7uY48SGNJIoRUELFJ10tz2boIXgBEXyb1BWBE_AMlWzQcIR9YZJ-578nkr7TAzt874x7. الف) ابتدا با انجام مراحل

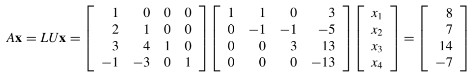
https://lh4.googleusercontent.com/J6ngZezh5cMVw1jrYUQLjKGVYV9qccyslj_K27cQJb-VLtbpARb2vJ6OTCel7CifI05aQUXc6dM8eiYwLp5mEU2cWXLh3joez-bRBeEbm76ett-Gxgff7zTLF7QvkKX52htCVC7Mسیستم فوق را به ماتریس مثلثی زیر تبدیل می‌کنیم :



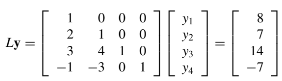
حال حاصلضرب و ماتریس بالا مثلثی , تجزیه زیر را می‌سازند.



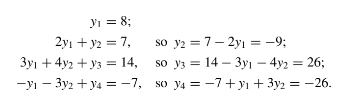
ب) معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:



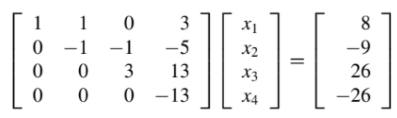
که برای حل آن از جایگزینی استفاده می‌کنیم. درنیتجه داریم:



که ماتریس y نیز به سادگی به صورت زیر بدست می آید :



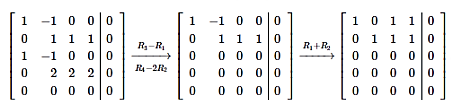
سپس معادله را برای بدست آوردن (جواب مسئله) به صورت زیر می‌نویسیم :



که با استفاده از جایگزینی عقب گرد جواب آن به سادگی بدست می‌آید که داریم .

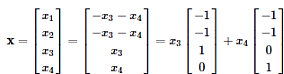
8. الف) برای این که یک پایه برای فضای پوچ بیابیم , ابتدا یک توصیف جبری از میابیم. به یاد بیاورید که شامل جواب های دستگاه همگن می‌باشد. حال جواب های این دستگاه را

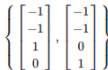
با انجام عملیات‌های سطری بر روی ماتریس افزونه به صورت زیر بدست می‌آوریم:



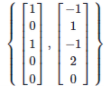


در نتیجه داریم که

پس اعضای به فرم زیر خواهند بود:

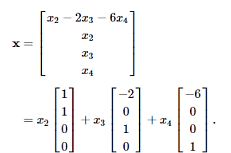
که در نتیجه پایه‌های آن مجموعه زیر می‌باشد :

(به سادگی میتوان دید که این بردار ها مستقل خطی‌اند؛ در نتیجه می‌توانند یک پایه برای فضای باشند)

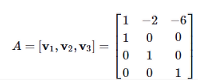
ب) توجه کنید که ما فرم کاهش‌یافته سطری ماتریس را در قسمت الف بدست آورده‌ایم (قسمت افزونه را نادیده بگیرید). از آنجایی که دو ستون اول دارای درایه پیشروی 1 می‌باشند در نتیجه داریم که مجموعه زیر یک پایه برای می‌باشد.

ج) دوباره با توجه به فرم کاهش یافته ماتریس در قسمت الف می‌بینیم که دو بردار غیر صفر زیر یک پایه برای فضای سطری ماتریس فوق می‌باشند.

9. برای هر بردار متعلق به به فرم داریم که:



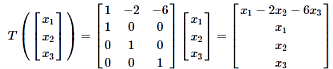
فرض کنید که بردارهایی باشند که در ترکیب خطی بالا برای بردار ظاهر می‌شوند. به سادگی میتوان دید که مجموعه یک پایه برای فضای می‌باشد. حال تبدیل خطی را به صورت تعریف می‌کنیم که در آن



چون یک پایه برای فضای است، درنتیجه یک مجموعه مستقل خطی بوده که نتیجه می‌دهد که ستون های مستقل خطی هستند پس داریم.

همچنین می‌دانیم که دامنه برابر دامنه (فضایی که ستون های اسپن می‌کنند) می‌باشد. در نتیجه داریم .

حال با توجه به تعریف ما از ماتریس ، نمایش آن به فرم ماتریس می‌باشد که فرمول صریح‌تری از آن به صورت زیر می‌باشد:



10. اثبات قسمت راهنمایی:

فرض کنید ، و یک پایه برای فضای برداری باشد و یک پایه برای فضای برداری باشد .

حال یک بردار دلخواه از فضای برداری به فرم میباشد کهو و از آنجایی که یک پایه برای فضای U می‌باشد، می‌توانیم بنویسیم .و به طور مشابه .

پس داریم . و چون در قرار دارد. در نتیجه داریم و این نتیجه می‌دهد که .

الف ) فرض کنید و که  و بردار ستون‌های ماتریس و می‌باشند.

می‌دانیم که ماتریس برابر فضای ستونی ماتریس می‌باشد. یعنی

و به طور مشابه و

چرا که .

ادعا میکنیم که

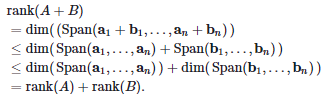
برای هر بردار کهمی‌توانیم بنویسیم

و داریم که



در نتیجه ادعای ما اثبات می‌شود .

سپس داریم که



که در اینجا از استفاده کردیم .

ب ) 1) (امتیازی) می‌دانیم که ماتریس برابر دامنه ماتریس می‌باشد درنتیجه داریم:

به طوری کلی اگر فضای زیرفضایی از فضای برداری باشد داریم که.

در نتیجه کافی است نشان دهیم که زیرمجموعه‌ای از فضای برداری است.

برای هر بردار برداری مانند وجود دارد که (با توجه با تعریف دامنه)

فرض کنید در نتیجه داریم .

و چون بردار درون قرار دارد در نتیجه زیرمجموعه‌ای از می‌باشد و داریم که



ب) 2) چون ماتریس نامنفرد است ، معکوس پذیر است. در نتیجه وارون ماتریس به صورت وجود دارد. قسمت الف را به ازای دو ماتریس و  به جای ماتریس های و در نظر بگیرید. در نتیجه خواهیم داشت:

که از ترکیب آن با قسمت الف خواهیم داشت:

درنتیجه همه نامساوی ها در اصل تساوی می‌باشند در نتیجه خواهیم داشت:

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز 99